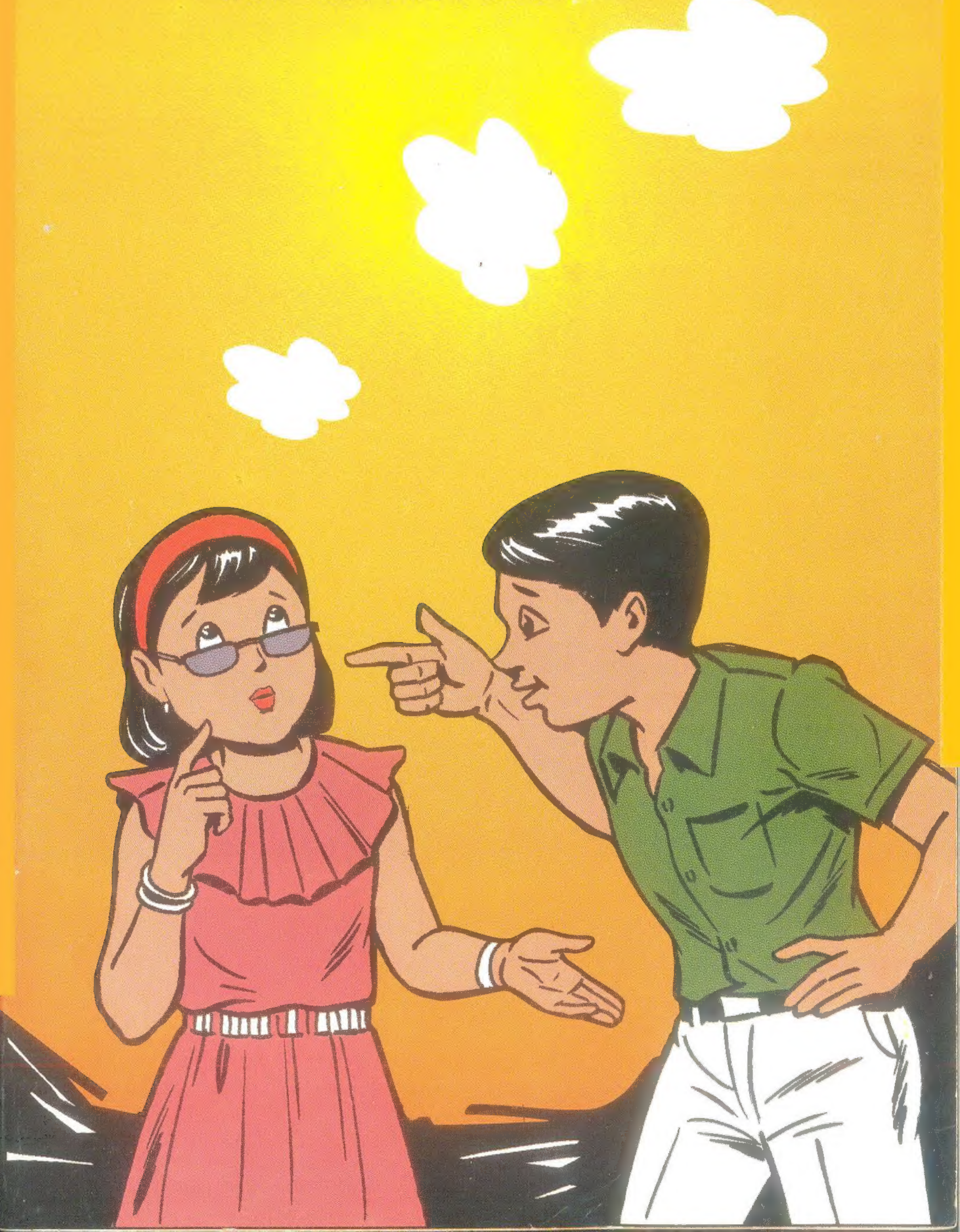
गणित रंजन

लेखक : लक्ष्मण शंकर गोगावले



गणित रंजन

लेखक

लक्ष्मण शंकर गोगावले

■ **गणित रंजन**

■ **प्रकाशक**
प्रमोद वि. बापट
प्रमोद प्रकाशन
११२०, सदाशिव पेठ,
निंबाळकर तालीम चौक,
पुणे - ४११०३०
फोन - ४७२८४४

■ जुलै १९९९

■ **मुखपृष्ठ**
हेमंत सरदेसाई

■ **मुद्रणस्थळ**
स्मिता प्रिंटर्स
प्रमोद वि. बापट
१०१९, सदाशिव पेठ
नागनाथ पाराजवळ,
पुणे ३०

■ **किंमत रु. २५/-**

आईच्या आशीर्वादाने साकारलेले हे पुस्तक
आईस अर्पण

– लक्ष्मण शंकर गोगावले

मनोगत

या पुस्तकात गणिती कोडी व ती कशी सोडवायची, याची स्पष्टीकरणेही दिली आहेत.

मुलांना गणित विषय अवघड वाटतो. परंतु गणित हा विषय किती सोपा नि कसा समजेपर्यंत जादू वाटणारा आहे. तसेच या कोड्यातून बुद्धीला चालना मिळेल व मनोरंजनही होईल. स्पर्धा परीक्षांनाही या पुस्तकांचा खूपच उपयोग होईल.

लक्ष्मण गोगावले

शुभेच्छेची दोन फुले

माझे धाकटे बंधू, श्री. लक्ष्मण शंकर गोगावले यांच्या या सदर पुस्तकाला प्रस्तावना लिहिताना मला आनंद होतो आहे.

अंकगणित हा विषय तसा अवघड परंतु सहज सोपा आणि मुलांना आवडेल व भावेल हा हेतू डोळ्यांसमोर ठेवून, मुलांसाठी या पुस्तकाची मांडणी करण्यात लक्ष्मण गोगावले यशस्वी झाले आहेत.

आजपर्यंत गणित या विषयावर त्यांनी मौलिक लिखाण केले आहे. गणिती संख्यांशी मैत्री करून त्यांनी नवेनवे मनोरंजक शोध लावले. कॉम्प्युटरच्या गतीने क्षर्णाधात बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यांची मांडणी मनात करून उत्तरांची जादू दाखविणारे हे 'गणिती जादूगर' महाराष्ट्रातील विद्वानांच्या व्यासपीठावर एक आगळे वेगळे स्थान निर्माण करून बसले आहेत.

त्यांच्या पुस्तकांच्या हजारो प्रतींची विक्री आज शाळा, महाविद्यालये, विविध सहकारी संस्था, साखरकारखाने, बँका इत्यादींमधून धुमधडाक्याने होत आहे. प्रतिवर्षी त्यांच्या पुस्तकांचे पुनर्मुद्रण होत आहे.

त्यांच्या पुस्तकांचा त्यांनी कोणत्याही दुकानात बाजार न मांडताही जेथे जेथे ते व्याख्यानास जातील तेथे तेथे त्यांच्या पुस्तकांची मागणी होत आहे. प्रतिवर्षी पुस्तकांची मागणी वाढतच आहे.

सहज सोप्या भाषेतील त्यांची गणिती व्याख्याने गणितप्रेमींना गणित संशोधनात उपयुक्त ठरणारी आहेत. आजपर्यंत त्यांची हजारोंच्यावर व्याख्याने महाराष्ट्रातील वरील विविध संस्थांतून झाली आहेत.

गणित हा विषय आयुष्याचे ध्येय मानून त्यांनी अत्यंत जिद्दीने या विषयात नेत्रदीपक यश संपादन केले आहे. गणितावरील व्याख्याने व पुस्तके यांची विक्री ते धंदा-व्यवसाय या स्वरूपाने किंवा नावलौकिक प्रसिद्धीच्या मागे न लागता सामाजिक बांधिलकेचे हे व्रत म्हणून त्यांनी मुलांच्यासाठी स्वीकारले आहे.

मला असा विश्वास वाटतो की, भविष्यात लक्ष्मण गोगावले यांच्या हातून गणिती जादूचे अनेक चमत्कार निर्माण होतील, व हे शोध बालमित्रांना तसेच गणित प्रेमींना उपयुक्त ठरतील.

लक्ष्मण गोगावले यांची व्याख्याने त्यांचे असंख्य गणिताचे चाहते आयोजित करतील व त्यांद्वारे त्यांच्या पुस्तकास व गणिती प्रकल्पास प्रोत्साहन मिळेल अशी अपेक्षा आहे. लक्ष्मण गोगावले यांच्या हातून गणिताचे अधिकाधिक संशोधन कार्य होईल व मुलांसाठी अनेक गणिती गमतीजमतीच्या पुस्तकांची निर्मिती होत राहील असा विश्वास मला आहे.

त्यांच्या सदर पुस्तकांस माझी ही शुभेच्छेची दोन फुले!

गो. तु. गोगावले
महाराष्ट्र राष्ट्रमान सभा पुणे.

अनुक्रमणिका

गणित! गणित!! गणित!!! / ७
जन्मतारखेवरून जादूचा चौरस / ८
कवायतीतील क्रमांक / १०
दिन गणना / १२
कमीत कमी अंतर / १४
गुणाकार, बेरीज समान / १५
वीस रुपये व नोटा / १७
बारा तारा / १९
पहिलवानांच्या कुस्त्यांची संख्या / २०
गुणाकार आणि बेरीज समान येणाऱ्या संख्या / २१
कमीत कमी वजने / २३
पेटीचे कप्पे पाडणे / २५
कापरेकर स्थिरांकाप्रमाणे स्थिरांक / २७
मनातील संख्या / २८
नऊने भागण्याची नवीन पद्धत / ३०
११ ने भागण्याची पद्धत / ३२
बागेतील झाडांची संख्या / ३४
तीन संख्यांची बेरीज व गुणाकार समान येणाऱ्या संख्या / ३५
बेरीज अगोदर मांडण्याची जादू / ३७
जादूचा षट्कोन / ३९
चौरस आखण्यासाठी पेनने चालण्याचे अंतर / ४०
हलके नाणे / ४१
सुप्रसिद्ध कोडे / ४३
फसवणूक करणारी कोडी / ४४
कोडे / ४७
मनातील संख्या / ४९
बैजिक स्वरूपात काही कोडी / ५१
२०० वर्षांचे कॅलेंडर (१९०१ ते २१००) / ५२
खेळातून गणित / ५५

✳

गणित! गणित!! गणित!!!

प्रत्येकाला कशाचा ना कशाचा तरी छंद असतोच. त्याचप्रमाणे मलाही अंकगणिते सोडविण्याचा छंद आहे. तर हा छंद लागण्यास कारण म्हणजे–

अभ्यासातील सर्वांत सोपा विषय गणित
असे मी पहिल्या इयत्तेपासून असे मानीत
त्यामुळे मी सतत असे गणिते सोडवीत.
मी गणिते सोडवत असे रानात.
हे वैद्य सरांच्या आले ध्यानात.
तेव्हा त्यांनी मला आणले पुण्यात.
राहण्याची सोय केली आपटे प्रशालेमध्ये
जेवणाची सोय केली पूनम हॉटेलमध्ये
व काम दिले ज्ञानेश्वर विद्यापीठामध्ये.
तेव्हापासून मी शाळेत राहत होतो
पूनम हॉटेलमध्ये जेवण करत होतो
नि उरलेला वेळ गणित अभ्यास करत होतो.

✳

जन्मतारखेवरून जादूचा चौरस

बरेच दिवसांपासून माझ्या ऐकण्यात होते, सुप्रसिद्ध गणिती रामानूजम् यांनी त्यांच्या जन्मतारखेवरून जादूचा चौरस तयार केला आहे. तेव्हा मीदेखील ठरवले, आपणही आपल्या जन्मतारखेवरून जादूचा चौरस तयार करावा. त्याप्रमाणे प्रयत्न करू लागलो. माझी दाखल्यावरील जन्मतारीख 1 जून 1964 ही आहे. परंतु ही तारीख शक्यतो अंदाजे आहे. खेडेगावात अनेकांची जन्मतारीख 1 जून हीच असते. त्यामुळे मी त्या तारखेचा जादूचा चौरस तयार केला नाही.

परंतु माझा एक थोरला भाऊ म्हणतो, माझी जन्मतारीख 31 डिसेंबर 1963 ही आहे. तसेच कोणाच्याही आईस तारीख माहीत नसली, तरीपण वार माहीत असतोच. तेव्हा आईदेखील म्हणते, माझा जन्मवार मंगळवार आहे. तेव्हा मी देखील या 31 डिसेंबर 1963 या तारखेस गणिताने कोणता वार येतो ते पाहिले तर तो मंगळवारच येतो असे दिसून आले. त्यामुळे शक्यतो माझी जन्मतारीख 31-12-1963 हीच असेल असे समजून मी याच तारखेवरून जादूचा चौरस तयार केला आहे. तर तो पुढीलप्रमाणे आहे–

31	12	19	63
67	15	18	25
13	30	62	20
14	68	26	17

बेरीज 125

तर या जादूच्या चौरसातील प्रत्येक ओळीतील अंकांची बेरीज 125 च येते (उभ्या, आडव्या, तिरक्या). तर या 125 या संख्येचे वैशिष्ट्य म्हणजे 125 ही संख्या पाचची घन संख्या आहे नि या 125 या संख्येतील अंकांची बेरीज $1 + 2 + 5 = 8 = 2^3$ येते. तसेच–

$125 = 11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2 = 5^2 + 6^2 + 8^2$
$= 3^2 + 4^2 + 10^2$

तसेच 125 यातील 5 हा अंक डावीकडे प्रथम घेतल्यास उत्तर $512 = (2^3)^3 = 8^3$ असे येते.

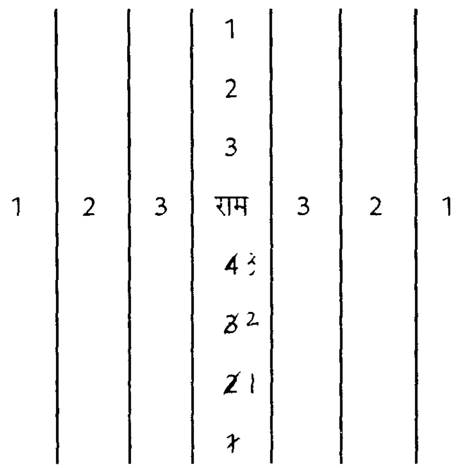
तसेच $125 = \left((1 \times 2 \times 5)^3 \div (1 + 2 + 5)\right)$

तर असे जन्मतारखेवरून जादूचे चौरस तुम्हीही तुमच्या जन्मतारखेवरून तयार करण्याचे प्रयत्न करा व वरीलप्रमाणे येणाऱ्या बेरजेची वैशिष्ट्ये शोधा.

*

कवायतीतील क्रमांक

कवायतीसाठी रांगा करून मुले उभी होती. त्या वेळी मुलांची प्रथम पूर्व बाजूला तोंडे होती. तर त्या वेळी रामचा त्याच्या ओळीत चौथा क्रमांक होता. नंतर मुलांना उत्तरेकडे तोंडे करायला सांगितली तर त्या वेळीदेखील रामचा त्याच्या ओळीत चौथाच क्रमांक होता. मुलांची तोंडे कोणत्याही दिशेला केली तरी रामचा त्याच्या ओळीत चौथाच क्रमांक असे, तर त्या वेळी कवायतीसाठी किती मुले असतील.



तर हे उत्तर काढण्यासाठी मी प्रथम एक मोठा चौकोन वरीलप्रमाणे आखून घेतला. नंतर विचार करून ठरवले, रामचा चौथा क्रमांक म्हणजे त्याच्या समोर तीन मुले असतील तसेच सर्व बाजूंनी चौथा क्रमांक म्हणजे त्याच्या सर्व बाजूंनी त्याच्या ओळीत त्याचे समोर तीन-तीन मुले असतील. म्हणजेच त्याच्या डाव्या बाजूला तीन रांगा व उजव्या बाजूला तीन रांगा व त्याची एक रांग अशा एकूण उभ्या सात रांगा असतील. तसेच त्याच्यासमोर तीन मुले व मागे तीन मुले

म्हणजेच समोरच्या तीन रांगा व मागच्या तीन रांगा व त्याची एक रांग अशा एकूण आडव्याही सातच रांगा असतील त्यावरून उभ्या सात रांगा व आडव्या सात रांगा म्हणजेच 7 × 7 = 49 मुले त्या वेळी कवायतीसाठी असतील.

तर असे तुम्हीही वेगवेगळे क्रमांक घेऊन कवायतीसाठी किती मुले असतील याची काही उदा. करून पाहा. तसेच समजा, समोरून पाचवा व मागून आठवा व डाव्या बाजूने पहिला व उजव्या बाजूने बारावा असे वेगवेगळे क्रमांकही घेऊन पाहा.

*

दिन गणना

एकदा मी नेहमीप्रमाणे आकडेमोड करत होतो, तेव्हा मी सहज मजेने ठरवले की, कोणत्याही तारखेपासून दुसऱ्या कोणत्याही तारखेपर्यंत एकूण दिवस किती झालेत, होतील ते चटकन कसे ओळखता येईल असे मानून मी आकडेमोड करू लागलो. तेव्हा माझ्या लक्षात आले की, वर्षाचा अंक कितीही मोठा असला, तरी त्या अंकास वर्षाच्या दिवसांचा आकडा 365 हा मानून त्यास 365 ने गुणावे व त्या गुणाकारात, त्या वर्षाच्या आकड्यात लीप वर्ष किती येतील तेवढे दिवस मिळवावेत म्हणजे एकूण दिवस किती होतील ते काढता येतील. (वर्षाचा आकडा पूर्ण वर्षामधेच असेल तर) परंतु तारखा वेगवेगळ्या घेतल्या तर त्या तारखांच्या महिन्यांचे दिवस काढण्यास थोडा वेळ लागत असे. त्यासाठी मी मनाने ठरवले की, प्रथम एकाच वर्षातील कोणत्याही तारखेपासून दुसऱ्या कोणत्याही तारखेपर्यंत एकूण दिवस किती झालेत ते चटकन काढता आले पाहिजे, असे मानून तयारी करू लागलो.

त्यासाठी मी प्रथम क्रमाने महिन्यांमधीलच तारखांचे दिवस मोजू लागलो. तर त्यामध्ये मला काही तारखांमध्ये असे दिसून आले की, आपण ज्या दोन तारखा घेतल्या त्या तारखांच्या अंकांची बेरीज केली असता त्या दोन तारखांच्या मधील एकूण दिवसांची संख्या मिळते.

उदा. 16 जानेवारी ते 1 फेब्रुवारी मधील दिवसांची संख्या 16 + 1 = 17 दिवस होतील. हेच उत्तर गणित पद्धतीने जानेवारीचे 31 दिवस व त्यामधून 16 तारखेच्या अगोदरचे 15 दिवस कमी करायचे म्हणजेच 31 - 15 = 16 व त्यामध्ये 1 फेब्रुवारीचा एक दिवस मिळवायचा म्हणजेच 16 + 1 = 17 दिवस ही त्या दोन तारखांमधील दिवसांची संख्या.

अशा प्रकारे काही तारखांच्याच अंकांची बेरीज केली असता त्या दोन तारखांमधील एकूण दिवसांची संख्या मिळते. तेव्हा मी सहज मजेने ठरवले की, असे एका वर्षात जास्तीत जास्त किती दिवस मिळतील की त्यांच्या

तारखांच्या अंकांची बेरीज केली असता त्या तारखांमधील एकूण दिवसांची संख्या मिळते?

यासाठी मी प्रथम खूप वेळ आकडेमोड केली व मला शेवटी जास्तीत जास्त दिवसांचा आकडा मिळाला तो असा–

16 जानेवारी ते 28 फेब्रुवारी = 16 + 28 = 44 (लीपवर्ष नसल्यास)

16 मार्च ते 30 एप्रिल	= 16 + 30 =	46
16 मे ते 30 जून	= 16 + 30 =	46
16 जुलै ते 29 ऑगस्ट	= 16 + 29 =	45
31 ऑगस्ट ते 29 ऑक्टोबर	= 31 + 29 =	60
31 ऑक्टो. ते 31 डिसेंबर	= 31 + 31 =	62
		303 एकूण

अशा प्रकारे एका वर्षातील तारखांच्या अंकांची बेरीज केली असता, त्या तारखांमधील एकूण दिवसांची संख्या मिळते असे मला एका वर्षात जास्तीत जास्त 303 दिवस मिळाले व ते जर लीपवर्ष असेल तर 304 दिवस होतील.

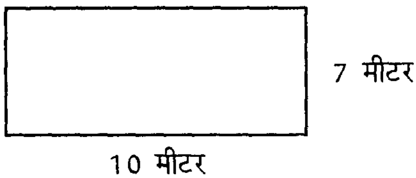
वरील उदा. मध्ये 16 जुलै पासून 29 ऑगस्ट पर्यंतच दिवस घेतले कारण 30 ऑगस्ट घेतल्यास, लगेच पुढे 31 ऑगस्ट ते 29 ऑक्टो. पर्यंत म्हणता येणार नाही कारण त्यामध्ये 16 जुलै ते 29 ऑक्टोबरपर्यंतचे सर्व दिवस येतील व त्यासाठी 16 जुलै ते 29 ऑक्टोबर असेच म्हणावे लागेल व त्यामधील दिवसांची संख्या त्या तारखांच्या बेरजेवरून येत नाही त्यामुळे मध्ये कमीत कमी एक दिवस तरी सोडावा लागेल व त्यासाठीच येथे मध्ये एकच दिवस म्हणून 30 तारखेचा दिवस सोडला आहे.

तुम्ही जन्मल्यापासून आजपर्यंत किती दिवसांचे झालात ते काढण्याचा प्रयत्न करून पहा.

तसेच किती तासांचे झालात, किती मिनीटांचे झालात व किती सेकंदांचे झालात ते काढण्याचा प्रयत्न करून पहा.

कमीत कमी अंतर

दहा मीटर लांब व सात मीटर रुंद असे एक मैदान आहे. त्या मैदानाच्या चार कोपऱ्यांवर चार वस्तू ठेवलेल्या आहेत नि त्या मैदानाच्या एका कोपऱ्यावर एक मनुष्य उभा आहे. त्या माणसास त्या मैदानाच्या चारी कोपऱ्यांवरील चारी वस्तू एका जागी गोळा करण्यास सांगितल्या तर त्या माणसास त्या चारी वस्तू एका जागी गोळा करण्यास कमीतकमी किती अंतर चालावे लागेल.



तर त्या माणसास, तो ज्या कोपऱ्यावर उभा आहे, त्या कोपऱ्याची रुंदीची बाजू जी असेल त्या बाजूने सुरुवात करून प्रथम चालावे लागेल.

म्हणजेच प्रथम सात मीटर चालावे लागेल नंतर लांबीची बाजू दहा मीटर चालावे लागेल. त्यानंतर पुन्हा रुंदीची बाजू सात मीटर चालावे लागेल तर असे एकूण त्या मनुष्यास 7 + 10 + 7 = 24 मीटर कमीत कमी चालावे लागेल. तर असे तुम्ही वेगवेगळे आयत, चौरस, त्रिकोण व वर्तुळाकृती अशी वेगवेगळी मैदान आहेत असे मानून त्या मैदानांमध्ये वेगवेगळ्या ठिकाणी वस्तू ठेवून त्या वस्तू गोळा करण्यास कमीतकमी किती अंतर चालावे लागेल ते करून पाहा.

*

गुणाकार, बेरीज समान

गुणाकार, बेरीज समान येणाऱ्या संख्या शोधण्याची एक पद्धत मला बरेच दिवसांपासून माहिती होती. ती म्हणजे, प्रथम कोणतीही एक संख्या घेऊन, त्या संख्येच्या छेदस्थानी एक मांडायचा व दुसरी संख्या घेताना ती प्रथमचीच संख्या अंशस्थानी घेऊन, छेदस्थानी त्या संख्येपेक्षा एकाने कमी असणारी संख्या मांडायची. अशा त्या दोन संख्या तयार करून त्यांचा गुणाकार व बेरीज केली तर ती समानच येतात.

उदा.

$$\frac{5}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \qquad \frac{5}{1} + \frac{5}{4} = 25$$

तर ही पद्धत मला बरेच दिवसांपासून माहीत होती. परंतु आता काही दिवसांपूर्वी अशा आणखी संख्या शोधण्याची आणखी एक पद्धत मला मिळाली तर ती अशी, वरीलप्रमाणेच प्रथम कोणतीही एक संख्या घेऊन ती त्या दोन्ही संख्यांच्या अंशस्थानी मांडायची व छेदस्थानच्या कोणत्याही दोन संख्या अशा घ्यायच्या की, त्यांची बेरीज केली तर ती अंशस्थानी मांडलेल्या म्हणजेच प्रथम घेतलेल्या संख्येइतकी असेल.

तर अशा कोणत्याही दोन संख्यांचा गुणाकार - बेरीज केली तर ती समानच येते.

उदा.

$$\frac{8}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{64}{15} = \frac{8}{5} + \frac{8}{3} = \frac{64}{15}$$

$$\frac{23}{10} \times \frac{23}{13} = \frac{529}{130} = \frac{23}{10} + \frac{23}{13} = \frac{529}{130}$$

तर अशी वरीलप्रमाणे तुम्हाला, गुणाकार, वजाबाकी समान येणाऱ्या संख्या शोधण्याची पद्धत मिळते का ते पाहा.

*

वीस रुपये व नोटा

नोटांची किंमत	1 रु.	2 रु.	5 रु.	10 रु.	20 रु.	एकूण नोटांची संख्या
1	–	–	–	–	1	1
2	–	–	–	2	–	2
3	–	–	2	1	–	3
4	–	–	4	–	–	4
5	1	2	1	1	–	5
6	–	5	–	1	–	6
7	5	–	1	1	–	7
8	5	–	3	–	–	8
9	1	7	1	–	–	9
10	–	10	–	–	–	10
11	2	9	–	–	–	11
12	4	8	–	–	–	12
13	6	7	–	–	–	13
14	8	6	–	–	–	14
15	10	5	–	–	–	15
16	12	4	–	–	–	16
17	14	3	–	–	–	17
18	16	2	–	–	–	18
19	18	1	–	–	–	19
20	20	–	–	–	–	20

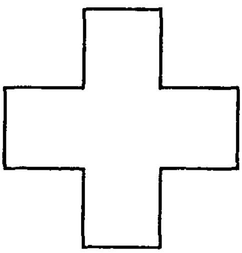
आपण सध्या व्यवहारात वापरतो त्या नोटांपैकी, त्या नोटेच्या इतक्या सर्व प्रकारच्या नोटांमध्ये मांडता येतात, अशी मोठ्यात मोठी रक्कम म्हणजे 20 रुपये.

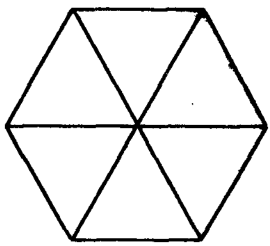
ते कसे ते तुम्ही मागील पानावर पाहिले असेलच.

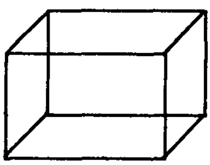
*

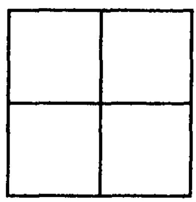
बारा तारा

एकाच लांबीच्या आवश्यक तेवढ्या तारा घेऊन वेगवेगळ्या आकाराच्या आकृत्या काढता येतात त्याप्रकारे मी येथे एकाच लांबीच्या बारा तारा घेऊन काही आकृत्या काढून दाखवत आहे.









तर अशा आणखीही अनेक प्रकारच्या आकृत्या काढता येतील. तसेच तारांची संख्या वेगवेगळी घेऊन तुम्हीही अनेक प्रकारच्या आकृत्या काढण्याचे प्रयत्न करून पाहा.

*

पहिलवानांच्या कुस्त्यांची संख्या

एकदा एका फडात आठ पहिलवान उतरले होते. तर त्या पहिलवानातील सर्वश्रेष्ठ पहिलवान निवडण्यासाठी त्या पहिलवानांच्या कमीतकमी किती कुस्त्या लावाव्या लागतील.

प्रथम 8 पहिलवानांच्या 8 ÷ 2 = 4 कुस्त्या

नंतर 4 पहिलवानांच्या 4 ÷ 2 = 2 कुस्त्या

शेवटी 2 पहिलवानांची 2 ÷ 2 = 1 कुस्ती

तर अशा एकूण 4 + 2 + 1 = 7 कुस्त्या लावाव्या लागतील.

तर असे मी पहिलवानांच्या निरनिराळ्या संख्या घेऊन काही उदा. करून पाहिली. तर माझ्या लक्षात आले की, पहिलवानांची संख्या जितकी असेल त्यापेक्षा एकने कमी इतक्या कुस्त्या लावाव्या लागतात. नंतर काही दिवसांनी मी ठरवले असे का होते? पहिलवानांच्या संख्येपेक्षा एकनेच कमी कुस्त्यांची संख्या का? तर माझ्या लक्षात आले की, आपल्याला सर्वश्रेष्ठ एकच पहिलवान निवडायचा असतो. त्यामुळे उरलेला प्रत्येक पहिलवान एकेकदा पडला जाणारच व तेवढे पहिलवान पडण्यासाठी तेवढ्या कुस्त्या लावाव्या लागतील. तर अशा वेगवेगळ्या पहिलवानांच्या संख्या घेऊन निवडण्याच्या पहिलवानांची संख्या वेगवेगळी घेऊन कमीत कमी किती कुस्त्या लावाव्या लागतात ते पाहा.

गुणाकार आणि बेरीज समान येणाऱ्या संख्या

एकदा मला एक शिक्षकांनी कोडे सांगितले होते की, ज्याप्रमाणे $2 \times 2 = 4$ व $2 + 2 = 4$ होतात तशी बेरीज व गुणाकार समान येणारी आणखी एक संख्या आहे तर ती कोणती?

त्या वेळी मी ही संख्या शोधण्यासाठी खूप वेळ आकडेमोड केली परंतु ती संख्या मिळाली नव्हती. कारण दोन खेरीज कोणत्याही दोन पूर्णांक संख्यांचे गुणाकार व बेरीज समान येतच नाही. त्यामुळे मी मानले, अशी पूर्णांक संख्या नसेलच व असेल तर ती अपूर्णांकातच असली पाहिजे. त्यामुळे मी अपूर्णांकाकडे वळलो. अपूर्णांकाकडे वळताच ती संख्या मला दोन मिनिटांतच मिळाली. ती संख्या $3 \times 1.5 = 4.5$ व $3 + 1.5 = 4.5$ अशी होती.

नंतर मी काही दिवसांनी ठरवले अशा आणखी काही संख्या असतील तर त्याही शोधून काढू. असे मानून प्रयत्न केले तर प्रथम चार संख्या मिळाल्या. त्या संख्या खाली दिल्या आहेत.

$\frac{3}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ व $\frac{3}{1} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ $\qquad$ $\frac{4}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ व $\frac{4}{1} + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

$\frac{5}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$ व $\frac{5}{1} + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$ $\qquad$ $\frac{6}{1} \times \frac{6}{5} = \frac{36}{5}$ व $\frac{6}{1} + \frac{6}{5} = \frac{36}{5}$

पहिल्यांदा या चार संख्या मिळाल्या होत्या. मी त्या संख्यांचे नीट निरीक्षण केले तर असे आढळून आले की, ती संख्या ग असेल तर दुसरी संख्या ग (ग 1) ही घ्यावी व अशा कोणत्याही दोन संख्यांचा गुणाकार व बेरीज केली तर उत्तर समानच येते.

उदा.

$$\frac{11}{1} \times \frac{11}{10} = \frac{121}{10} \text{ व } \frac{11}{1} + \frac{11}{10} = \frac{121}{10}$$

$\frac{11}{10} = 1.1$ असे घेऊन पाहू.

$11 + 1.1 = 12.1$ व $11 \times 1.1 = 12.1$

*

कमीत कमी वजने

एकदा मला एकाने कोडे सांगितले होते की, तू कोणतीही सात प्रकारची वजने अशी घे की, त्यावरून 120 किलो पर्यंतचे कोणतेही वजन एकाच वेळी करता येईल. वजन पूर्ण किलोमध्येच असेल.

त्या वेळी मी निरनिराळ्या संख्या घेऊन बेरजा करून पाहत असे तर खूप संख्या येत असत परंतु क्वचित् थोड्याफार संख्या येत नसत. त्या वेळी मी पुन्हा पुन्हा संख्या बदलून पाहत असे. परंतु मला अचूक उत्तर मिळाले नव्हते. नंतर मी काही दिवसांनी क्रमाने वजने मिळवत गेलो तर उत्तर लगेचच मिळाले. ते असे–

प्रथम एक किलोचे वजन देण्यासाठी एक किलोचे माप असणे आवश्यक आहे. नंतर दोन किलो देण्यासाठी दोनचेही माप असणे आवश्यक आहे. नंतर तीन किलो देण्यासाठी 1 + 2 ची मापे मिळून देता येईल. त्यामुळे तीनचे माप असणे आवश्यक नाही, नंतर चार किलो देण्यासाठी चारचे माप असणे आवश्यक आहे. नंतर पाच किलो देण्यासाठी चारचे माप असणे आवश्यक आहे. नंतर पाच किलो देण्यासाठी 4 + 1 मिळून पाच किलो देता येईल नंतर सहा किलो देण्यासाठी 4 + 2 मिळून देता येईल नंतर सात किलो देण्यासाठी 4 + 2 + 1 मिळून देता येईल. नंतर आठ किलो देण्यासाठी आठचे माप आवश्यक आहे. हे आठचे माप घेतल्यानंतर, प्रथमच्या सात किलो पर्यंतची सर्व मापे देता येतात. म्हणून 8 + 7 = 15 किलो पर्यंतची सर्व मापे देता येतील. नंतर 16 किलो देण्यासाठी 16 किलोचे माप असणे आवश्यक आहे व हे सोळा किलोचे माप घेतल्यानंतर 16 + 15 = 31 किलो पर्यंतची सर्व मापे देता येतील व नंतर 32 किलोचे माप घ्यावे लागेल. हे 32 किलोचे माप घेतल्यानंतर 32 + 31 = 63 किलो पर्यंतची सर्व मापे देता येतील व नंतर 64 किलोचे माप घ्यावे लागेल. हे 64 किलोचे माप घेतल्यानंतर 64 + 63 = 127 पर्यंत कोणतेही माप देता येईल.

म्हणजेच 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ही सात प्रकारची मापे घेऊन 127 **किलो पर्यंतचे** कोणतेही वजन देता येईल. नंतर मी या संख्यांचे नीट निरीक्षण केले तर असे दिसून आले की, या संख्या क्रमाने दोनचे घातांक आहेत.

✳

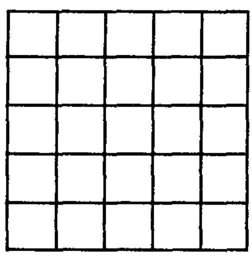
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

पेटीचे कप्पे पाडणे.

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

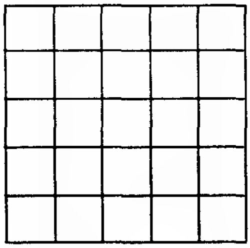
एक 5 × 5 मी. लांबीची पेटी आहे. त्या पेटीत निरनिराळ्या वस्तू ठेवण्यासाठी 1 × 1 मी. लांबीचे कप्पे पाडायचे आहेत. ते कप्पे पाडण्यासाठी एक खूप लांब फळी आहे, तर त्या फळीचे कमीतकमी किती तुकडे पाडावे लागतील? असा मी मनाने प्रश्न उभा केला होता.

ते उत्तर काढण्यासाठी मी एका वहीच्या पानावर 5 × 5 सें.मी. चा चौरस आखून त्या चौरसाचे 1 × 1 सें.मी. चौरस भाम पाडताना असे पाडले की, प्रथम आडव्या रेषा ओढून घेतल्या नंतर उभ्या रेषा ओढताना अशा ओढल्या की, प्रथमच्या रेषेपलीकडे रेषा ओढताना पेन उचलल्याशिवाय रेषा ओढायची नाही. कारण प्रथम आडव्या फळ्या ठेवल्यानंतर उभ्या फळ्या ठेवताना त्या फळीचे छोटे तुकडे केल्याशिवाय भाग पाडताच येणार नाहीत. तेव्हा आडव्या व उभ्या रेषा ओढताना पेन एकूण चोवीस वेळा उचलावा लागला. म्हणजेच त्या फळीचे लहानमोठे कमीतकमी चोवीस तुकडे पाडावे लागतील.



हे चोवीस उत्तर चटकन कसे काढायचे? असे मानून प्रयत्न केले तर असे आढळून आले की ती पेटी 5 × 5 मी. लांबीची व कप्पे 1 × 1 मी. लांबीचे म्हणून 25 - 1 = 24 व चोवीस त्या कप्प्याचे क्षेत्रफळ 1 × 1 = 1 ने भागायचे 24 - 1 = 24 च उत्तर येईल.

हे सूत्र सगळीकडेच लागू आहे की नाही ते पाहण्यासाठी मी आणखी एक उदाहरण 6 × 6 लांबीचे घेऊन कप्पे 2 × 1 लांबीचे पाडून पाहिले तर त्यास देखील हे सूत्र लागू पडत होते.



हे आखण्यासाठी पेन सतरा वेळा उचलावा लागला म्हणून

(6 × 6) - (2 × 1) = 36 - 2 = 34 व 34 - त्या कप्प्याचे क्षेत्रफळ 2 म्हणून 34 - 2 = 17 हे उत्तर.

म्हणजेच हा नियम आयताकृतीसाठीही लागू आहे असे दिसून येते.

❊

कापरेकर स्थिरांकाप्रमाणे स्थिरांक

कापरेकर स्थिरांक 6174 हा आहे. या संख्येचे वैशिष्ट्य म्हणजे या चार अंकी संख्येतील अंकांपासून मोठ्यात मोठी संख्या तयार केली तर ती 7641 ही होईल व छोट्यात छोटी संख्या तयार केली तर ती 1467 ही होईल व या दोन्ही संख्यांची वजाबाकी केली तर पुन्हा 6174 हीच संख्या मिळते.

मी या संख्येप्रमाणेच स्थिर राहणाऱ्या या संख्येपेक्षा छोट्या व मोठ्यादेखील शोधल्या आहेत. तर त्या संख्येच्या प्रकारची छोटी संख्या 495 ही आहे.

$$
\begin{aligned}
495 = \;& 954 \\
& -459 \\
= \;& 495
\end{aligned}
$$

तसेच मोठी संख्या 864197532 ही आहे.

864197532 =	987654321	मोठी संख्या
−	123456789	छोटी संख्या
	864197532	

तसेच वरील उदाहरणावरून असेही दिसून येते की 1 ते 9 अंकांपैकी प्रत्येक अंक समान वेळा, असा प्रत्येक अंक कितीही वेळा घेऊन कितीही अंकी संख्या तयार करून त्यांची वजाबाकी केली तर आपोआप कापरेकर स्थिरांकाप्रमाणे स्थिरांक मिळतो.

✳

मनातील संख्या

प्रथम कोणतीही दोन अंकी संख्या घ्या व त्या संख्येतील अंकांची बेरीज करा. ही बेरीज त्या मूळ संख्येतून उणे करा. उणे करून आलेल्या उत्तरातील एक अंक मला सांगायचा व उरलेला म्हणजेच न सांगितलेला अंक कोणता तो मी सांगायचा.

उदा. 78 = 7 + 8 = 15

$$\begin{array}{r} 78 \\ -\ 15 \\ \hline 63 \end{array}$$

तर या त्रेसष्ठमधील, समजा मला तुम्ही सहा सांगितले तर उरलेला अंक तीन हा मी सांगायचा.

मी हे तीन कसे सांगणार?

तर तो वजाबाकी करून येणारा अंक हा नेहमी नऊने पूर्ण भाग जाणाराच येतो. तेव्हा नऊने पूर्ण भाग जाणारी संख्या ही त्या संख्येतील अंकांच्या बेरजेवरून ओळखता येते. तेथे नऊने पूर्ण भाग जाण्यासाठी किती कमी आहेत ते काढण्यासाठी त्यांनी सांगितलेली संख्या नऊ मधून उणे करायची. म्हणजे आपोआप त्यांनी न सांगितलेली संख्या मिळते. म्हणजेच येथे 9 – 6 = 3 हे आपोआप मिळाले.

ही पद्धत कितीही अंकी संख्येला लागू पडते.

तेव्हा आपण आणखी एक तीन अंकी संख्येचे उदाहरण घेऊन पाहू.

उदा. 784 = 7 + 8 + 4 = 19

$$\begin{array}{r} 784 \\ -\ 19 \\ \hline 765 \end{array}$$

ही तीन अंकी संख्या 765 आली. आता या तीन अंकी संख्येतील कोणतेही दोन अंक सांगायचे व उरलेला तिसरा अंक कोणता तो मी सांगायचा. समजा 7 नि 5 हे दोन अंक सांगितले तर उरलेला सहा हा अंक कसा ओळखायचा?

तेव्हा प्रथम त्यांनी सांगितलेले अंक 7 नि 5 या अंकांची बेरीज करायची. ती बारा येईल. आता हे बारा नऊमधून उणे होत नाहीत म्हणून पुन्हा या बारा या संख्येमधील अंकांची बेरीज करायची. अशी शेवटी एक अंकी संख्या येईतोपर्यंत बेरीज करत राहायचे व एक अंकी संख्या आल्यावर ती नऊमधून उणे करायची. म्हणजेच येथे 12 मधील अंकांची बेरीज 1 + 2 = 3 येईल व हे तीन नऊमधून उणे करायचे म्हणजे आपोआप सहा हा अंक मिळेल.

*

नऊने भागण्याची नवीन पद्धत

कोणत्याही संख्येला नऊने भागायचे असल्यास प्रथम त्या संख्येतील अंकांची बेरीज एक अंकी संख्या येईपर्यंत करावी. म्हणजे समजा, त्या संख्येतील अंकांची बेरीज 48 येते तर पुन्हा या 48 मधील अंकांची बेरीज 4 + 8 = 12 की, पुन्हा या बारा मधील अंकांची बेरीज 1 + 2 = 3 असे शेवटी एक अंकी संख्या येईपर्यंत करावे व ती बेरीज करून आलेली संख्या ही त्या भागाकाराची बाकी समजावी. त्या बाकीमधून एकंस्थानचा अंक उणे करावा. (उणे होत नसेल तर दहाचा हातचा घ्यावा.) व तो उणे करून आलेला अंक हा उत्तराच्या संख्येतील एकंस्थानचा अंक समजावा. आता त्या एकंस्थानच्या संख्येतून प्रथमच्या संख्येतील दहंस्थानचा अंक समजावा व तो उणेकरून आलेला अंक हा उत्तराच्या संख्येतील दहंस्थानचा अंक आहे. पुन्हा या उत्तरातील दहंस्थानच्या संख्येतून प्रथमच्या संख्येतील शतंस्थानचा अंक उणे करावा व शतंस्थानचा अंक उणे करून आलेली संख्या ही उत्तरातील शतंस्थानची संख्या समजावी, पुन्हा या शतंस्थानच्या संख्येतून प्रथमच्या संख्येतील सहस्र स्थानची संख्या उणे करावी. अशा प्रकारे उणे करून आलेल्या संख्या हे उत्तर समजावे. असे करत-करत शेवटी त्या संख्येत जेवढे अंक असतील तितके वेळा करावे व जे अंक उणे करून आले तेच त्या भागाकाराचे उत्तर व सर्वांत प्रथम त्या संख्येतील अंकांची बेरीज करून आलेली संख्या तीच त्या भागाकारातील बाकी.

टीप : सर्वांत प्रथम बेरीज करून आलेली संख्या (एक अंकी) जर नऊ असेल तर ती शून्य समजावी व त्या शून्यातून एकंस्थानचा अंक उणे करायचा म्हणजेच दहाचा हातचा घेऊन दहातून उणे करायचा.

तसेच उत्तर कॅल्क्यूलेटर पद्धतीने हवे असेल, तर प्रथम वरील प्रमाणेच करून, उत्तर काढून, त्या उत्तराच्या उजवीकडे दशांश अपूर्णांकाचे चिन्ह देऊन, प्रथम वर मांडलेला बाकीचा अंक या दशांशापुढे कितीही वेळा लिहिला

तरी चालेल.

उदा. 642 − 9 = 6 + 4 + 2 = 12 = 1 + 2 = 3 बाकी

$$\begin{array}{lr} \therefore & 713 \text{ बाकी} \\ - & 642 \\ \hline & 071 \text{ उत्तर} \end{array}$$

आता दुसरे उदाहरण घेऊ.

12579 = 1 + 2 + 5 + 7 + 9 = 24 = 2 + 4 = 6 बाकी.

$$\begin{array}{r} 13976 \\ -\ 12579 \\ \hline 01397 \end{array}$$

01397 = 1397.6666... कॅल्क्यूलेटर पद्धतीने

$$\begin{array}{r} 171470 \\ -\ 154323 \\ \hline 017147 \end{array}$$

154323: 1+5+4+3+2+3 = 18 = 1 + 8 = 9 = 0 बाकी

017147 उत्तर

*

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

११ ने भागण्याची पद्धत

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

कोणत्याही संख्येला अकराने भागायचे असल्यास प्रथम ती संख्या किती अंकी (सम अंकी, की विषम अंकी) आहे ते पाहावे. जर ती संख्या विषम अंकी असेल तर त्या संख्येतील (डाव्या बाजूने) 1, 3, 5, 7... नंबरच्या अंकांच्या बेरजेतून 2, 4, 6, 8... नंबरच्या अंकांची बेरीज उणे करावी व सम अंकी संख्या असेल तर (डाव्या बाजूने) 2, 4, 6, 8... नंबरच्या अंकांच्या बेरजेतून 1, 3, 5, 7 नंबरच्या अंकांची बेरीज उणे करावी व उणे करून आलेला अंक ही बाकी समजावी. (उणे होत नसेल तर अकराच्या पटीतील हवा असलेला अंक हातचे मानून घ्यावा व या हातच्यांचा काहीही विचार करू नये.) ही बाकी एकंस्थानच्या संख्येतून उणे करावी व उणे करून आलेला अंक दहंस्थानच्या संख्येतून उणे करावा. पुन्हा दहंस्थानच्या संख्येतून उणे करून आलेला अंक शतंस्थानच्या संख्येतून उणे करावा व असे करत-करत शेवटी ती संख्या जितके अंकी असेल तितकेवेळा करावे व शेवटी उणे करून आलेल्या अंकांची (क्रमाने) जी संख्या तयार होते तेच त्या भागाकाराचे उत्तर होईल.

टीप : उणे होत नसेल तर अकराचा हातचा घ्यावा.

उदा. 53381 ही संख्या (5) विषम अंकी आहे म्हणून
(5+3+1)−(3+8)=9−11=(9+11)=20−11=9 बाकी.

```
  53381
− 48529 बाकी
  -----
  04852 उत्तर
```

678394 = ही संख्या सम अंकी आहे म्हणून

(7 + 3 + 4) - (6 + 8 + 9) = 14 - 23

= (14 + 11) - 23 = 25 - 23 = 2 बाकी

```
    678394
-   616722 बाकी
   ________
    061672 उत्तर
```

✳

बागेतील झाडांची संख्या

एकदा मी एका बागेत फिरायला गेलो होतो. तर त्या बागेत शेताच्या लांबीत बारा झाडे मावतात व रुंदीत नऊ झाडे मावतात असे आढळून आले. तसेच त्या बागेतील काही झाडे उन्हामुळे वाळून गेली होती. त्यामुळे त्या बागेत 97 चांगली झाडे होती. तेव्हा मी त्या वाळलेल्या झाडांचे नीट निरीक्षण केले तर असे आढळून आले की, लांबीच्या सात रांगेतील एकही झाड वाळलेले नव्हते. तेव्हा मी मनात प्रश्न केला की, रुंदीच्या जास्तीतजास्त किती रांगेतील एकही झाड वाळलेले नसेल व कमीत कमी किती रांगेतील एकही झाड वाळलेले नसेल.

तर हे उत्तर काढण्यासाठी मी लगेचच तेथेच आकडेमोड करत बसलो. तर ती अशी–

प्रथम, त्या बागेत लांबीत बारा व रुंदीत नऊ झाडे मावतात. म्हणजेच त्या बागेतील एकूण $12 \times 9 = 108$ झाडे हवी होती. परंतु काही झाडे वाळल्यामुळे 97 च झाडे होती. म्हणजेच $108 - 97 = 11$ झाडे वाळलेली होती. परंतु त्या अकरा झाडांपैकी लांबीच्या सात रांगेत एकही झाड वाळलेले नाही. म्हणजेच उरलेल्या पाचच ओळींत ती झाडे आहेत. तर आपण थोडा वेळ त्या पाच ओळीत $11 \div 5 = 2$ उत्तर व एक बाकी म्हणून प्रत्येक ओळीत दोन-दोन व एका ओळीत तीन झाडे असतील तर असे मानले तर रुंदीतील कमीत कमी तीन ओळींतील झाडे वाळलेली असतील. म्हणजेच रुंदीत जास्तीत जास्त $9 - 3 = 6$ ओळीत एकही झाड वाळलेले नसेल. कमीत कमी काढण्यासाठी प्रथम या पाच ओळींतील चार ओळीत एकेकच झाड वाळलेले आहे असे समजले तर रुंदीतील जास्तीत जास्त सात रांगेतील झाडे वाळलेली असतील. म्हणजेच रुंदीतील $9 - 7 = 2$ म्हणजे कमीत कमी दोन रांगेतील एकही झाड वाळलेले नसेल.

⁕

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

तीन संख्यांची बेरीज व गुणाकार समान येणाऱ्या संख्या

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

एकदा मी नेहमीप्रमाणे आकडेमोड करत होतो. तेव्हा मी मनाने ठरवले, ज्याप्रमाणे दोन संख्यांची बेरीज व गुणाकार समान येणाऱ्या संख्यांच्या असंख्य जोड्या आहेत, त्याचप्रमाणे तीन संख्यांच्या देखील बेरीज-गुणाकार समान येणाऱ्या संख्यांच्या जोड्या आहेत का ते पाहू. त्याप्रमाणे प्रयत्न करू लागलो.

परंतु यासंबंधीचे एक उदाहरण मला बरेच दिवसांपासून माहीत होते ते म्हणजे $1 + 2 + 3 = 6$ नि $1 \times 2 \times 3 = 6$. तर या प्रकारच्या आणखी काही संख्या आहेत का ते पाहू, म्हणून प्रयत्न करू लागलो. तेव्हा मला काही दिवसानंतर सर्वांत प्रथम सापडलेली दोन उदाहरणे म्हणजे–

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4}$$

व

$$\frac{3}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{3}{1} + \frac{4}{3} + \frac{13}{9}$$

ही दोन उदाहरणे मिळाली होती. मी या उदाहरणांचे नीट निरीक्षण केले तर असे आढळून आले की, या उदाहरणांतील प्रथमची संख्या जर x असेल तर दुसरी संख्या $\frac{x + 1}{x}$ व तिसरी संख्या $\frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ ही असावी. अशा प्रकारच्या कोणत्याही तीन संख्या घेऊन त्यांचा गुणाकार व बेरीज केलीत तर ती समानच येईल.

उदा.

$$\frac{10}{1} + \frac{11}{10} + \frac{111}{100} = \frac{1221}{100} = \frac{10}{1} \times \frac{11}{10} \times \frac{111}{100} = \frac{1221}{100}$$

तसेच या उदाहरणांची आपण दशांश अपूर्णांकात रुपे घेऊन पाहू

$$10 + 1.1 + 1.11 = 12.21 = 10 \times 1.1 \times 1.11 = 12.21$$

म्हणजेच

$$\frac{x}{1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2} =$$

$$\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{x} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2}$$

*

बेरीज अगोदर मांडण्याची जादू

हा खेळ अनेक जण खेळतात. परंतु तो माहीत नसणाऱ्यास अगदी जादूच वाटते. परंतु मी अनेकांना सांगितले, गणित हा विषय समजेपर्यंत जादू वाटणारा आहे. तर तो जादूचा खेळ कोणता ते पाहू.

प्रथम आपल्या मित्राला एक चार अंकी कोणतीही संख्या मांडावयास सांगा. त्याने ती संख्या मांडल्यानंतर, नि नंतर आणखी ज्या चार संख्या मांडणार आहोत अशा एकूण पाच संख्यांची बेरीज किती येणार ते लगेचच मांडून टाकायचे. त्यानंतर पुन्हा मित्राला दुसरी कोणतीही संख्या मांडायला सांगायची. त्यानंतर तिसरी संख्या आपण मांडायची. त्यानंतर पुन्हा चौथी संख्या मित्राला मांडायला सांगायची नि पाचवी संख्या आपण मांडायची. नि या पाचही संख्यांची बेरीज आपण पहिल्यांदा मांडली तितकीच आहे की नाही ते पाहण्यास त्यास सांगायचे तर ती बेरीज अगदी अचूकच असणार. हे पाहून मित्रदेखील चकितच होणार. परंतु यामधे काही जादू नाही, तर ते कसे ते पाहू.

समजा आपल्या मित्राने 5742 ही संख्या मांडली तर आपण त्या पाच संख्यांची बेरीज, या संख्येपेक्षा दोनने कमी करून ते दोन डावीकडे प्रथम म्हणजेच दशहजार स्थानी मांडून जी संख्या तयार होईल तीच त्या पाच अंकांची बेरीज येईल. म्हणजेच येथे 5742 - 2 = 5740 नि ते दोन डावीकडे प्रथम म्हणजेच 25740 असे त्या पाच संख्यांच्या बेरजेचे उत्तर तयार होईल. त्यानंतर दुसरी संख्या मित्राने जी मांडली असेल त्या संख्येतील प्रत्येक अंक नऊमधून उणे करत करत आपण नवीन संख्या तयार करायची. त्यानंतर पुन्हा चौथी संख्या मित्राने मांडल्यानंतर आपण पाचवी संख्या, त्या चौथ्या संख्येतील प्रत्यके अंक नऊमधून उणे करून त्याखाली मांडत मांडत तयार करायची व या पाचही संख्यांची बेरीज आपण प्रथम मांडली तेवढीच असणार. कारण दोन नंबरची त्याने मांडलेली संख्या व तीन नंबरची आपण मांडलेली संख्या यांची बेरीज ९९९९ येते व तसेच चौथ्या नि पाचव्याही

संख्येचे उत्तर 9999 च येते व 9999 + 9999 = 19998 येईल व या संख्येत चार अंकी कोणतीही संख्या मिळवल्यास उत्तर नेहमी त्या मिळवलेल्या संख्येपेक्षा दोनने कमी करून तो दोन डावीकडे दशहजार स्थानी मांडावेत.

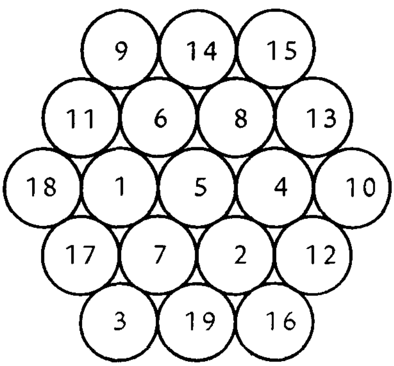
उदा.	मित्राने प्रथम	5742	= 25740
	मित्राने दुसरी	2497	
	आपण तिसरी	7502	
	मित्राने चौथी	6208	
	आपण पाचवी	3791	
	एकूण	25740	

*

जादूचा षट्‌कोन

मला बरेच दिवसांपासून माहीत होते की, प्रथम एक वर्तुळ काढले की, त्या वर्तुळाभोवती त्याच त्रिज्येची त्या वर्तुळाला स्पर्श करून सहाच वर्तुळे बसतात नि नंतर पुन्हा या सहा वर्तुळांभोवती बारा वर्तुळे बसतात. अशा प्रकारे सहाच्या पटीतच वर्तुळे बसतात. नि त्यांची सुसम षट्‌कोनाकृती तयार होते. तर असा माझ्याजवळ 19 वर्तुळांचा षट्‌कोन काढलेला होता. तेव्हा मी एकदा मनाने ठरविले, या षट्‌कोनात जादूच्या चौरसाप्रमाणे जादू करता येईल का? असे मानून प्रयत्न करू लागलो. परंतु या षट्‌कोनात काही ओळींत तीनच अंक येतील, काही ओळींत चार अंक येतील. नि काही ओळींत पाच अंक येतील व अशा काही ओळींतील तीन, चार, अथवा पाच अंक असले तरीही प्रत्येक ओळीतील अंकांची बेरीज समान येऊ शकेल का, असा माझ्यापुढे प्रश्न उभा राहिला.

तेव्हा मी प्रथम 1 ते 19 पर्यंतच्या अंकांची बेरीज केली तर ती 190 येत होती व या षट्‌कोनात एका वेळी पाच ओळी आहेत. म्हणून 190 ÷ 5 = 38 इतकी बेरीज प्रत्येक ओळीतील अंकांची यायला पाहिजे, असे समजून मी 38 ही संख्या तीन, चार, पाच अंकांच्या बेरजेच्या स्वरूपात अनेक प्रकारे मांडून घेतली व त्यावरून पुढील जादूचा षट्‌कोन तयार केला, हा षट्‌कोन तयार करण्यास बराच वेळ लागला.



चौरस आखण्यासाठी पेनने चालण्याचे अंतर

एकदा मी नेहमीप्रमाणे जादूचे चौरस सोडविण्यासाठी चौरस आखत होतो. मी चौरस आखण्यासाठी घेतलेला कागद संपूर्ण कोरा होता. त्यामुळे उभ्या, आडव्या दोन्हीकडेही रेषा ओढाव्या लागल्या. तेव्हा रेषा ओढता ओढता मी सहज मजेने ठरविले, या रेषा ओढण्यास पेन न उचलता पेनला कमीत कमी किती अंतर चालावे लागेल. त्यासाठी प्रथम क्रमाक्रमाने चौरस आखत गेलो. तर प्रथम 1 × 1 सेंमी चा चौरस आखला तर चौरस आखण्यासाठी पेनला त्या चौरसाच्या चार बाजू म्हणजे 4 सेंमी अंतर चालावे लागले. त्यानंतर 2 × 2 सेंमीचा चौरस आखला. तर हा चौरस आखताना पेन न उचलता आखायचा आहे म्हणून काही बाजूंवरून डबल वेळा जावे लागले. त्यामुळे हा चौरस आखण्यास पेनला 14 सेंमी. अंतर चालावे लागले. यानंतर 3 × 3 सेंमी चा चौरस आखण्यासाठी पेनला कमीत कमी 28 सेंमी अंतर चालावे लागले. तर मी असे आणखीही अनेक चौरस आखून पाहिले व हे 1 × 1 सेंमी च्या वेळी 4 सेंमी, 2 × 2 च्या वेळी 14 सेंमी, 3 × 3 च्या वेळी 28 सेंमी हे उत्तर चटकन कसे शोधायचे असे मानून प्रयत्न केले. तर हे उत्तर चटकन शोधण्याचे एक सूत्र मिळाले. तर ते असे : जर त्या चौरसाची बाजू अ सेंमी असेल तर तो चौरस नि त्या चौरसाचे 1 × 1 सेंमीचे चौरस आखण्यासाठी पेनने चालण्याचे अंतर 2(अ × (अ + 1) + (2अ - 2)

उदा. 4 × 4 सेंमी चा चौरस नि त्या चौरसाचे 1 × 1 सेंमी चे भाग पाडण्यासाठी पेन न उचलता पेनने उचलण्याचे अंतर सूत्रावरून 2(4 × 5) + 8 - 2 = 40 + 6 = 46 सेंमी अंतर पेनला चालावे लागेल.

✳

हलके नाणे

एकदा मला एकाने कोडे सांगितले होते की, आठ नाणी आहेत, नि त्या आठ नाण्यांमधील सात नाणी समान वजनाची आहेत. त्यांतील एकच नाणे जरासे किंचित हलके आहे. तर ते नाणे तराजूचा वापर फक्त दोनच वेळा करून कसे ओळखता येईल?

तर हे कोडे सोडविण्यासाठी मी प्रथम तराजूच्या दोन्ही पारड्यांत चार-चार नाणी टाकू असे मानले व नंतर ज्या पारड्यात हलके नाणे आहे असे समजेल, त्या पारड्यातील ती चार नाणी घेऊन ती दोन्ही पारड्यांत दोन-दोन नाणी टाकू असे मानले व नंतर ज्या दोन नाण्यांपैकी हलके नाणे आहे असे समजल्यानंतर ती दोन नाणी घेऊन आता तराजूचा वापर न करता या दोन नाण्यांमधील हलके नाणे कसे ओळखता येईल? तसे काही ओळखता येणे शक्य नाही असे समजून ते कोडे सोडविण्याकडे दुर्लक्ष केले. नंतर काही दिवसांनी माझ्या लक्षात आले की, या आठ नाण्यांमधील तराजूच्या दोन्ही पारड्यांत तीन-तीनच नाणी टाकू व बाजूला दोन नाणी ठेवू, कारण आता घेतलेल्या सहा नाण्यांमध्ये जर समानता दिसून आली तर बाजूला ठेवलेल्या दोन नाण्यांपैकीच एखादे हलके नाणे असेल व ते कोणते नाणे आहे ते एकदा वजन करून ओळखता येईल व या प्रथमच्या सहा नाण्यांमध्येच जर असमानता आढळून आली तर जी तीन नाणी हलकी दिसतात फक्त तीच नाणी घ्यायची. म्हणजेच प्रथम बाजूला ठेवलेल्या दोन नाण्यांचे वजन करण्याची गरजच नाही व नंतर या तीन नाण्यांमधील दोन नाणी दोन्ही पारड्यांत टाकून एक नाणे बाजूला ठेवायचे व आता या तराजूमधील नाण्यांत समानता दिसून आली तर बाजूला ठेवलेलेच नाणे हलके व असमानता दिसून आली तर जे नाणे हलके दिसेल तेच नाणे त्या आठ नाण्यांपैकी हलके नाणे.

अशा प्रकारे, आठ नाण्यांमधील हलके नाणे, तराजूचा वापर फक्त दोनच वेळा करून ओळखता येते. तसेच असेही दिसून येते की नऊ नाणी असती

तरीही फक्त दोनदाच वजन करून हलके नाणे ओळखता आले असते. कारण सुरुवातीला आपण फक्त दोनच नाणी बाजूला ठेवली होती. तर त्या वेळी तीन नाणी देखील बाजूला ठेवता आली असती. म्हणजेच तीन नाण्यांमधील हलके नाणे ओळखण्यास फक्त एकदाच वजन करण्याची आवश्यकता असते. त्यानंतर नऊ नाण्यांमधील हलके नाणे दोनदा वजन करून ओळखता येते. तेव्हा मी या संख्यांचे नीट निरीक्षण केले. तर या संख्या तीनच्या घातांक पटीतील आहेत असे दिसून आले. त्यावरून मी मनाने ठरविले, आता सत्तावीस नाण्यांमधील हलके नाणे तीन वेळा वजन करून ओळखता येईल. तर ते कसे? प्रथम तराजूच्या दोन्ही पारड्यांत नऊ-नऊ नाणी टाकायची व बाजूला नऊ नाणी ठेवायची, तर या तीन भाग केलेल्या नऊ नाण्यांमधील कोणत्या भागात हलके नाणे आहे हे समजल्यावर नऊ नाण्यांमधील हलके नाणे दोनदा वजन करून ओळखता येतेच. तसेच यावरून असेही दिसून येते की तीनचा जो घातांक आहे तितक्या वेळा वजन करून तो जो घातांक येईल, तितक्या नाण्यांमधील हलके नाणे ओळखता येईल.

उदा. $3^5 = 243$ तर या 243 नाण्यांमधील हलके नाणे फक्त पाच वेळा वजन करून ओळखता येईल.

*

सुप्रसिद्ध कोडे

तीन मित्र होते. ते एकदा हॉटेलमध्ये जेवायला गेले. तेव्हा त्या हॉटेलचे तीस रुपये बिल झाले. तेव्हा त्यांनी ते तीस रुपये प्रत्येकाने दहा रुपये असे दिले. परंतु त्या हॉटेल मालकाने त्यांना पाच रुपये परत देण्यास त्याच्या नोकरास सांगितले तेव्हा त्या नोकराने ठरविले हे पाच रुपये प्रत्येकाला समान कसे वाटायचे? समान वाटता येत नाही म्हणून स्वतः दोन रुपये घेतले व त्या प्रत्येकाला एक एक रुपया परत दिला. म्हणजेच प्रत्येकाने नऊ-नऊ रुपये बिल दिले, असे मानण्यास हरकत नाही. म्हणून $9 \times 3 = 27$ हे सत्तावीस रुपये व त्या नोकराने घेतलेले दोन रुपये असे एकूण एकोणतीस रुपये होतील. तर त्या तीस रुपयांमधला एक रुपया कोठे गेला? असे कोडे मला अनेकजण विचारतात.

या कोड्याचे उत्तर सांगायचे म्हणजे त्या नोकराने घेतलेले दोन रुपये या लोकांनी दिलेल्या सत्तावीस रुपयांत मिळवायचे नसून वजा करायला हवेत. म्हणजे $27 - 2 = 25$ रुपये त्या हॉटेल मालकाकडे आहेतच, असे समजेल व खरे पाहता (कोड्यात) विचार करण्याची आवश्यकताच नाही.

तर हे पुन्हा पटण्यासाठी, समजा त्या हॉटेलमालकाने त्यांच्या नोकरास सांगितले की, आठ रुपये परत दे. त्या नोकराने तेव्हा प्रत्येकाला दोन-दोन रुपयेच दिले, व स्वतः दोन रुपये घेतले असे मानले तर त्या प्रत्येकाने आठ रुपये दिले असा अर्थ होईल. तेव्हा $8 \times 3 = 24$ हे चोवीस रुपये, व त्या नोकराने घेतलेले दोन रुपये म्हणजे येथे सव्वीसच रुपये होतील. तर हे चार रुपये कोठे गेले, असा प्रश्न उद्भवेल. परंतु वर सांगितल्याप्रमाणे त्या लोकांनी दिलेल्या $8 \times 3 = 24$ रुपयांपैकी नोकराने घेतलेले दोन रुपये वजा करायचे म्हणजेच बावीस रुपये हॉटेल मालकाकडे उरतील.

अशा प्रकारे त्या तीस रुपयांमधील प्रत्येकाने दोन रुपये परत मिळाले व नोकराने दोन रुपये घेतले आणि हॉटेल मालकाकडे बावीस रुपये आहेत. अशा प्रकारे एकूण तीसच्या तीस रुपयांचा हिशोब आहे.

फसवणूक करणारी कोडी

एकदा मला एकाने कोडे सांगितले होते की, एक मनुष्य एका पेटीत रोज सकाळी पाच रुपये टाकतो व संध्याकाळी त्याच पाच रुपयांमधील चार रुपये काढून घेतो. तसेच रोज दुपारी दुसरा एक मनुष्य त्या पेटीत किती रुपये आहेत ते पाहतो. तर त्या रोज दुपारी पाहणाऱ्या माणसास कितव्या दिवशी पंधरा रुपये साठलेले दिसतील? (त्या पेटीत)

तर हे कोडे ऐकून मी देखील प्रथम, तो जो सकाळी पाच रुपये टाकतो व त्या पाच रुपयांमधील संध्याकाळी चार रुपये काढून घेतो, म्हणजेच रोज एक रुपया शिल्लक पडतो तर असे त्या पेटीत पंधरा रुपये साठण्यास पंधरा दिवस लागतील, असे त्या कोडे सांगणाऱ्यास उत्तर सांगून टाकले. परंतु हे उत्तर चुकीचे आहे, असे तो म्हणाला व जरा विचार करून उत्तर नंतर सांग म्हणाला.

तसेच हे ऐकून मी देखील मानू लागलो याचे हे उत्तर नसेलच. कारण हे उत्तर असेल तर हे कोडे म्हणून म्हणताच येणार नाही. कारण या कोड्याचे उत्तर पहिली-दुसरीतील मुले देखील सांगू शकतात. तर याचे उत्तर वेगळेच असेल असे मानून मी क्रमाक्रमाने उत्तर मिळवत गेलो. तर ते असे-

पहिल्या दिवशी सकाळी पाच रुपये टाकले म्हणजेच त्या दुपारी पाहणाऱ्यास हे पाच रुपये दिसतील व संध्याकाळी चार रुपये काढून घेतले म्हणजेच पहिल्या दिवशी एक रुपया शिल्लक असेल. नंतर दुसऱ्या दिवशी, सकाळी पाच रुपये टाकले म्हणजेच त्या दुपारी पहाणाऱ्यास सहा रुपये दिसतील व त्यामधून संध्याकाळी चार रुपये काढून घेतले म्हणजे दोन रुपये शिल्लक असतील. त्यानंतर तिसऱ्या दिवशी सकाळी पाच रुपये त्या पेटीत टाकले म्हणजेच त्या दुपारी पाहाणाऱ्यास सात रुपये दिसतील व त्यामधून संध्याकाळी चार रुपये काढून घेतले म्हणजे तीन रुपये शिल्लक राहतील.

तर अशाच क्रमाने दहाव्या दिवशी, प्रथमच्या नऊ दिवसांचे रोज एक रुपयाप्रमाणे नऊ रुपये शिल्लक असतील व त्यात हे पाच रुपये टाकले म्हणजे

दुपारी पाहणाऱ्यास चौदा रुपये दिसतील व या चौदा रुपयांमधील संध्याकाळी चार रुपये काढून घेतले. म्हणजेच त्या पेटीत दहा रुपये शिल्लक राहतील. व त्यानंतर अकराव्या दिवशी सकाळी त्या पेटीत पाच रुपये टाकले. तर त्या दिवशी त्या दुपारी पाहणाऱ्यास पंधरा रुपये दिसतील.

अशा प्रकारे त्या पेटीत रोज दुपारी पाहणाऱ्यास अकराव्या दिवशी पंधरा रुपये दिसतील.

तर ते कसे ते पुढे पुन्हा एकदा गणिती स्वरूपात मांडून दाखवत आहे.

दिवस	सकाळी	दुपारी	संध्याकाळी
1	5	5	1 = 05 - 4
2	1 + 5	6	2 = 06 - 4
3	2 + 5	7	3 = 07 - 4
4	3 + 5	8	4 = 08 - 4
5	4 + 5	9	5 = 09 - 4
6	5 + 5	10	6 = 10 - 4
7	6 + 5	11	7 = 11 - 4
8	7 + 5	12	8 = 12 - 4
9	8 + 5	13	9 = 13 - 4
10	9 + 5	14	10 = 14 - 4
11	10 + 5	15	

तसेच 'फसवणूक करणारी कोडी', या प्रकारचे आणखी एक उत्तम उदा. द्यायचे म्हणजे, मी पाचव्या इयत्तेत असताना मला आमच्या शिक्षकांनी एक गणित सांगितले होते की, एक खण घर बांधायला दोन खांब लागतात तर असे एक मोठे दहा खणांचे घर बांधायला किती लागतील?

तेव्हा मी चटकन उत्तर सांगितले एका खणास दोन खांब तर दहा खणांस वीस खांब लागतील. तेव्हा शिक्षक म्हणाले, उत्तर चुकीचे आहे. मी म्हणालो, कसे? तेव्हा ते म्हणाले, आपली शाळा किती खणांची आहे व त्यास किती खांब लागले आहेत ते पहा. तेव्हा मी देखील मोजून पाहिले तर शाळा चार खणांची होती व या चार खणांस पाचच खांब लागले होते.

तेव्हा ते देखील म्हणाले, जर एक खणास दोन खांब लागत असतील तर, खणांची संख्या जितकी असेल त्यापेक्षा एकने जास्त खांब लागतात. तर ते कसे पाहा.

खांब	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
खण	| 1	| 2	| 3	| 4	| 5	| 6	| 7	| 8	| 9	| 10	|

अशा प्रकारे दहा खणांस अकराच खांब लागतील, हे मला समजले.

नंतर मी काही दिवसांनी ठरविले, एक खणांस चारही कोपऱ्यावरचे चार खांब असे चार खांब लागतात, असे मानले तर त्या वेळी दहा खणांस किती खांब लागतील? असा मी मनाने प्रश्न केला व लगेचच तेथे एक आठ खणांचे घर होते त्या घराचे एकूण खांब मोजले तर त्या घरास अठरा खांब लागलेत. असे दिसून आले, तर ते कसे पाहू.

: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8

तर येथे टिंबं म्हणजे खांब मानले तर प्रथमच्या वेळी चार टिंबं काढावी लागली व नंतर दोन-दोनच टिंबं काढली. तेव्हा जर एक खणास अशा प्रकारचे चार खांब लागतात, असे असेल तर त्या वेळी खणांच्या संख्येच्या दुप्पट करून त्यात दोन मिळवावेत.

असेच फसवणूक करणारे गणितातील उदा. म्हणजे काळ, काम, वेग, अंतर या प्रकारच्या उदा. मध्ये अनेकजण फसतात. तर ते कसे ते पाहू.

समजा एक काम करण्यास पाच माणसांना आठ दिवस लागतात. तर ते काम करण्यास दहा माणसांना किती दिवस लागतील? तर अनेकजण आठचे दुप्पट सोळा दिवस लागतील असे सांगून टाकतात.

परंतु येथे हे व्यस्त प्रमाणाचे उदा. असते. तर ते कसे? तर येथे माणसांची संख्या वाढली, म्हणजे काम चटकन होईल नि कमी दिवस लागतील. म्हणजेच येथे माणसांची संख्या दुप्पट झाली. म्हणजेच ते काम करण्यास अगोदरच्या निम्मेच दिवस लागतील.

*

कोडे

एकदा मला एकाने कोडे सांगितले होते की, एका दुकानदाराजवळ पाच किलोचे नि तीन किलोचे अशी दोनच मापे आहेत. नि एका माणसाला सात किलो साखर हवी आहे. तर ती त्या दुकानदाराने कशी द्यावी?

तर हे कोडे सोडविण्यास मी थोडा विचार केला तर मला थोड्याच वेळात उत्तर मिळाले तर ते असे-

त्या दुकानदाराने प्रथम पाच किलो साखर मोजून त्यातील तीन किलोच्या मापावरून तीन किलो साखर काढून घेतली. म्हणजेच त्या तराजूमध्ये दोनच किलो साखर उरेल. तेव्हा प्रथम ही दोन किलो साखर दिली व नंतर पाच किलोच्या मापावरून पाच किलो साखर दिली. अशा प्रकारे त्या माणसाला सातच किलो साखर दिली.

त्यानंतर काही दिवसांनी मी ठरविले, त्या दुकानदारास याच दोन मापांवरून इतरही सर्व प्रकारची पूर्ण किलोमधील मापे देता येत असतील का? देता येत असतील तर ते कसे ते पाहू. असे मानून प्रयत्न करू लागलो व क्रमाक्रमाने मापे मिळवीत गेलो. तर ती अशी–

दुकानदार एक किलो देण्यासाठी प्रथम तीन किलोच्या मापावरून दोन वेळा वजन करून सहा किलो साखर एका पारड्यात ठेवत असेल नि त्यामधून, पाच किलोच्या मापावरून पाच किलो साखर वजा करत (काढून घेत) असेल. अशा प्रकारे एक किलोचे माप देत असेल.

त्यानंतर दोन किलो देण्यासाठी प्रथम पाच किलोच्या मापावरून पाच किलो वजन करीत असेल नि त्यामधून तीन किलोच्या मापावरून तीन किलो वजा करत असेल.

त्यानंतर तीन किलो देण्यासाठी तीनचे माप आहेच.

त्यानंतर चार किलो देण्यासाठी ती तीनच्या मापावरून तीन वेळा वजन करून प्रथम नऊ किलो वजन करत असेल व त्यामधून पाच किलोच्या

मापावरून पाच किलो वजा करीत असेल. अशा प्रकारे चारचेही माप देता येईल.

त्यानंतर पाच किलो देण्यासाठी पाचचे माप आहेच. त्यानंतर सहा किलो देण्यासाठी तीनचे मापावरून दोन वेळा वजन करून सहा किलोचेही माप देता येईल. त्यानंतर सात किलो कसे देतात ते आपण प्रथम पाहिले आहेच. त्यानंतर आठ किलो देण्यासाठी पाचचे नि तीनचे माप मिळून आठ किलोही देता येईलच.

अशा प्रकारचे पाचच्या नि तीनच्या मापावरून आठ किलोपर्यंतची पूर्ण किलोमध्ये असलेली सर्व मापे देता येतात. म्हणजेच त्यापुढीलही कोणतेही माप देता येईलच.

❊

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

मनातील संख्या

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>><<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

प्रथम कोणतीही एक दोन अंकी संख्या घेऊन त्या संख्येतील अंकांची बेरीज करा व ही आलेली बेरीज त्या दोन अंकी संख्येत मिळवा व ही बेरीज मिळवून आलेली संख्या मला सांगा नि मग मी तुमच्या मनातील प्रथम धरलेली दोन अंकी संख्या कोणती होती ते सांगतो.

उदा. तुम्ही प्रथम दोनअंकी 68 ही संख्या धरली. नंतर 68 मधील अंकांची बेरीज 6 + 8 = 14 आली नि ही आलेली बेरीज तुम्ही मनात धरलेल्या संख्येत मिळविली तर 68 + 14 = 82 हे उत्तर येईल. तर तुम्ही मला हे बेरीज करून आलेले उत्तर 82 हे सांगितले. तर मी तुम्ही प्रथम मनात धरलेली संख्या सांगतो. तर ते कसे ते पाहू.

त्यांनी बेरीज करून सांगितलेली संख्या जर सम असेल तर त्या संख्येपेक्षा छोटी व त्या संख्येतील सर्वांत जवळची अकाराने पूर्ण भाग जाणारी सम संख्या निवडून ती संख्या त्यांनी सांगितलेल्या संख्येतून वजा करायची व वजा करून आलेल्या उत्तराच्या निम्मे करून ते त्यांच्या मनातील संख्येच्या एकंस्थानचा अंक असतो व दहंस्थानचा अंक त्या अकराने भाग जाणाऱ्या निवडलेल्या संख्येतील असतो व असे दोन अंक मिळून त्यांनी धरलेली ती संख्या असते.

तसेच त्यांनी बेरीज करून सांगितलेली संख्या जर विषम असेल तर त्या संख्येपेक्षा छोटी व त्या संख्येला सर्वांत जवळची अकराने पूर्ण भाग जाणारी विषम संख्या निवडून ती संख्या त्यांनी सांगितलेल्या संख्येतून वजा करून आलेल्य संख्येच्या निम्मे करून आलेली संख्या ती त्यांच्या मनातील संख्येच्या एकंस्थानाचा अंक असतो व दहंस्थानचा अंक, त्या अकराने भाग जाणाऱ्या निवडलेल्या संख्येतील असतो व असे दोन अंक मिळून त्यांच्या मनातील संख्या तयार होते.

उदा. 97 = 9 + 7 = 16 = 97 + 16 = 113 तर येथे समजा 113 हा अंक सांगितला असता तर आपण 113 ही विषम संख्या आहे

म्हणून 113 पेक्षा छोटी व 113 ला सर्वात जवळची अकराने पूर्ण भाग जाणारी विषम संख्या 99 ही आहे म्हणून 113 - 99 = 14 नि 14 ÷ 2 = 7 ही संख्या त्यांच्या मनातील संख्येतील एकंस्थानाची संख्या व दहंस्थानची संख्या त्या 11 ने भाग जाणाऱ्या संख्येतील 9 ही आहे. म्हणजेच दहंस्थानी 9 व एकंस्थानी 7 आले, व असे दोन अंक मिळून त्यांच्या मनातील 97 ही संख्या ओळखता येते.

※

बैजिक स्वरूपात काही कोडी

खालील तीन अंकी संख्येतील अंक आहेत–

(1) अ ब क + ड ई फ = ग ह य = 2 7 3 + 5 4 6 = 8 1 9

(2) अ ब क - ड ई फ = ग ह य = 8 0 1 - 5 3 4 = 2 6 7

तर वरील प्रकारची आणखी काही उदा. तयार करता येतील,

पुढील दोन अंकी संख्येतील अंक आहेत–

(1) अ ब × अ ब = क अ ब = 25 × 25 = 625

(2) अ ब × अ ब = क अ अ ब = 76 × 76 = 5776

(3) अ × अ = अ + अ = 2 × 2 = 2 + 2

(4) अ × ब × क = अ + ब + क = 1 × 2 × 3 = 1 + 2 + 3

(5) अ × अ × अ × अ... = अ = 1 × 1 × 1 × 1... =?

(6) अ × ब = ब = अ × 0 = 0

(7) अ - ब = $\text{अ}^{\text{ब}} - \text{ब}^{\text{अ}}$ = 3 - 2 = $3^2 - 2^3$ = 9 - 8 = 1

(8) $$\text{अ} + \text{ब} = \text{अ} \times \text{ब} = \frac{\text{अ}}{1} + \frac{\text{अ}}{\text{अ}-1} = \frac{\text{अ}}{1} \times \frac{\text{अ}}{\text{अ}-1}$$

✳

२०० वर्षांचे कॅलेंडर (१९०१ ते २१००)

एकाच गावाला जाण्याचे अनेक मार्ग असतात. त्यामुळे नेहमीच एका मार्गाने जाणेही योग्य नाही. निरनिराळे व नवीन मार्ग शोधण्याचे प्रयत्न करणे आपले कर्तव्य आहे व त्यातूनही जर नवीन मार्ग अवघड वाटलाच तर आपला नेहमीचा जुना मार्ग असतोच.

त्याचप्रमाणे आपण मागील पुस्तकात तारखेवरून वार सांगण्याचे कोष्टक पाहिले आहे. तसेच तारखेवरून वार सांगण्याचा आणखी एक प्रकार मला काही दिवसांपूर्वी सापडला. तर तो कसा ते पाहू–

आपण मागील पुस्तकात पाहिले आहे. मी प्रथम एक जानेवारी 1901 ते 1 जानेवारी 1983 पर्यंत एकूण दिवस किती ते काढले. ते एकूण दिवस काढण्यासाठी मी प्रथम 1901 ते 1983 अशी एकूण वर्षं किती झाली आहेत ते पाहून त्या वर्षांच्या आकड्याला 365 (वर्षाचे एकूण दिवस) ने गुणले व त्यामध्ये त्या 82 वर्षांत जेवढी लीप वर्षे आली तो लीप वर्षाचा आकडा त्यात मिळवून एकूण दिवसांचा जो आकडा आला त्यास 7 ने भागून, उरलेल्या बाकीवरून व 1 जानेवारी 1983 च्या वारावरून 1 जाने. 1901 ला मंगळवार होता ते काढले.

परंतु आत्ता काही दिवसांपूर्वी माझ्या लक्षात आले की, मी प्रथम वर्षाच्या आकड्याला 365 ने गुणून नंतर येणाऱ्या आकड्याला 7 ने भागण्याऐवजी प्रथमच 365 ला 7 ने भागून फक्त उरलेल्या बाकीनेच वर्षाच्या आकड्याला गुणले तरी चालू शकेल. म्हणजेच प्रथमचा मोठा गुणाकार करणेही सोपे जाईल. तेव्हा प्रथम

$$
\begin{array}{r}
52 \\
7\overline{)365} \\
-35 \\
\hline
15 \\
-14 \\
\hline
1
\end{array}
\quad \text{बाकी}
$$

365 ला 7 ने भागले असता बाकी 1 उरली. म्हणून त्या (82) वर्षाच्या आकड्याला फक्त 1 ने च गुणले तरीही चालू शकेल. म्हणून 82 × 1 = 82 नि या 82 वर्षांत वीस 82 ÷ 4 = 20 लीप वर्षं आली. तर तो लीप वर्षाचा आकडा त्यात मिळविला. 82 + 20 = 102 नि यामध्ये 1 जानेवारी 1983 चा एक दिवस म्हणजे असे एकूण 103 च दिवस मानले, तरी चालू शकतील व या 103 या अंकास 7 ने भागले तर 5 बाकी उरते व 1 जानेवारी 1983 ला शनिवार होता म्हणजेच पाच जानेवारी 1901 ला शनिवार तर त्यावरून 1 जानेवारी 1901 ला मंगळवार होता, हे चटकन काढता येते व त्यावरूनच तारखेवरून वार ओळखण्याची एक नवीन पद्धत माझ्या लक्षात आली. तर ती कशी ते पाहू.

मी प्रथम 1901 सालातील प्रत्येक महिन्याची एक तारीख कोणत्या वारी येते ते पाहिले. व त्यासाठी मी प्रथम क्रमाने वार लिहून घेतले व त्या त्या वारासमोर त्या वारी ज्या महिन्याची एक तारीख आली तो महिना लिहिला व त्या महिन्यांना क्रमाने आकडे दिले. तर ते पुढीलप्रमाणे–

मंगळवार जानेवारी, ऑक्टोबर 1

बुधवार मे 2

गुरुवार ऑगस्ट 3

शुक्रवार फेब्रुवारी, मार्च, नोव्हेंबर 4

शनिवार जून 5

रविवार सप्टेंबर, डिसेंबर 6

सोमवार एप्रिल, जुलै 0

वर लिहिलेले महिन्यांसमोरचे आकडे म्हणजे त्या महिन्यासाठी वापरावा लागणारा आकडा असे मानून, मी त्या वारांना कोणते आकडे द्यायचे, असे मानून प्रथम 1 जानेवारी 1989 चे उदा. करून पाहिले. तर ते असे–

प्रथम - 89 = इसविसनाचा आकडा

22 = 89 वर्षात 89 ÷ 4 = 22 लीप वर्षं आली.

1 = जानेवारीसाठी वापरावयाचा आकडा

1 = दिनांक

एकूण 113 = 1 जानेवारी 1989 पर्यंतचे दिवस मानले. म्हणून 113 ÷ 7 = 1 बाकी उरते व जानेवारी 1989 ला रविवार आहे हे माहीत आहे. म्हणून त्यावरून

रविवार 1

सोमवार 2

मंगळवार 3

बुधवार 4

गुरुवार् 5

शुक्रवार 6

शनिवार 0

असे वारांना आकडे दिले.

अशा प्रकारे महिन्यांना व वारांना योग्य ते आकडे देऊन 1901 ते 2100 या दोनशे वर्षांतील तारखांचे वार ओळखता येतात. तर ते कसे ते पाहू.

टीप– लीप वर्षी जानेवारी, फेब्रुवारी महिन्याचा एक वार अलीकडील धरावा. उदा. 23 ऑगस्ट 1987

87 = वर्षाचा आकडा (1900 च्या पुढील) व 87 ÷ 4 = 21 लिप

+ 21 = 87 = 87 वर्षात 21 लीपवर्षं आली.

3 = ऑगस्ट महिन्यासाठी वापरण्याचा आकडा

23 = दिनांकाचा आकडा

134 = एकूण दिवस असे मानून त्यास सातने भागावे व सातने भागून उरलेला बाकीचा आकडा ज्या वारासमोर असेल तोच त्या तारखेचा वार.

134 ÷ 7 = 1 बाकी व 1 हा आकडा रविवारसमोर आहे. म्हणजेच 23 ऑगस्ट 87 ला रविवार असेल.

✳

खेळातून गणित

लहान मुले एकमेकांना शिवायला जाण्याचा खेळ खेळतात. तर तो खेळ खेळण्यासाठी सर्वांत प्रथम कोणी शिवायला यायचे, ते ठरवण्यासाठी ती मुले प्रथम गोल करून उभी राहतात नि काही अक्षरे ठरवतात नि त्या अक्षरांतील ठराविक अक्षर ज्याच्यावर आले असेल तो मुलगा निवडला जातो नंतर पुन्हा उरलेल्या मुलांत तीच अक्षरे त्याच क्रमाने तेथून पुढे म्हणायची. म्हणजे दुसरा मुलगा निवडला जातो. अशाच क्रमाने निवडत-निवडत शेवटी एक मुलगा उरेपर्यंत करतात नि शेवटी जो उरेल त्याने शिवायला यायचे.

त्यावरून एक गणित माझ्या लक्षात आले. तर ते कसे ते पाहू.

मुले शेवटचा क्रमांक निवडण्यासाठी काही अक्षरे म्हणतात. त्या अक्षरांना मी क्रमांक दिले आहेत.

म्हणजेच समजा सात मुले आहेत. नि तिसरा क्रमांक आला आणि तो निवडला. तर असे करत करत शेवटी कोणता क्रमांक उरेल--

वरील उदाहरणामध्ये पहिल्यांदा तिसरा क्रमांक निवडला. त्यानंतर त्यापुढील तिसरा क्रमांक सहा, नंतर पुन्हा उरलेल्या मुलांत सहाच्या पुढील तिसरा क्रमांक म्हणजे दोन येईल. की, पुन्हा उरलेल्या मुलांत तिसरा क्रमांक म्हणजे सात येईल. नंतर पुन्हा तेथून पुढे उरलेल्या मुलांमधील तिसरा क्रमांक म्हणजे पाच येईल. नंतर पुन्हा उरलेल्या मुलांमधील तिसरा क्रमांक म्हणजे एक येईल. शेवटी चार (चौथा) क्रमांक उरेल. तर ह्या अशा क्रमाने शेवटचा क्रमांक चट्‌कन निवडण्यासाठी कशी निवड करायची, यासाठी मी शेकडो उदाहरणे करून पाहिली. तेव्हा याच्या काही पायऱ्या मिळाल्या, परंतु सूत्र मिळाले नाही.

123 तर ते मागील उदाहरणापुढे पुन्हा काही प्रकारे सोडून
456 दाखवले म्हणजेच, येथे प्रथम क्रमाने तीन ओळीत अंक
712 लिहिले ते असे की एकदा तिसऱ्या ओळीत आलेला अंक
457 पुन्हा न वापरता उरलेले अंक तीन ओळीत क्रमाने मांडायचे व
145 असे करत करत तिसऱ्या ओळीत शेवटपर्यंत जो अंक येत
141 नाही तोच अंक शेवटी उरेल.
4

*



लक्ष्मण शंकरराव गोगावले

जन्म– पुणे जिल्ह्यातील, हवेली तालुक्यातील गोगलवाडी या गावी शेतकरी कुटुंबात.

लेखन– अंकगणित विषयाची बालपणापासून आवड असल्याने आजपर्यंत या विषयावर एकूण १० पुस्तके लिहून तयार.

गणित साहित्य व उपकरणे–

१) मण्यांच्या पाटीचा कॅलक्युलेटर.

२) जन्मतारखेवरून वार ओळखण्याचा तक्ता.

३) कोणत्याही दोन तारखांमधील दिवसांचे अंतर ओळखण्यासाठी उपकरण.

४) कामाचा वेळ (तास, मिनिटे, सेकंद) मोजण्यासाठी मण्यांच्या पाटीचा स्वतंत्र कॅलक्युलेटर.

५) मूळ संख्यांसाठी टेबल (पाढे) पुस्तिका.

प्रकाशित पुस्तके–

१) लक्ष्मणाची डायरी.

२) गणित रंजन.

३) गट्टी गणिताशी.

आगामी प्रकाशने– जादूचे चौरस, श्रेणी, मूळसंख्या, अंककोडी इत्यादी.

व्यवसाय– शाळा, महाविद्यालये, डी.एड्., बी.एड्. कॉलेज, राष्ट्रीयकृत व सहकारी बँका, सहकारी संस्था, विविध कार्यालये, औद्योगिक कंपन्या इत्यादींमधून गणित विषयावर व्याख्याने.

संपर्क– लक्ष्मण शंकर गोगावले
'फुलोरा अपार्टमेंट', फ्लॅट नं. १८,
धनकवडी गावठाण, ग्रामपंचायत ऑफिसजवळ,
धनकवडी, पुणे– ४३.

प्रमोद प्रकाशन